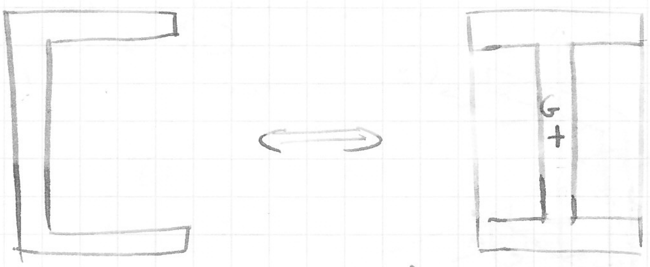
2,5
6
2
2
12,5/20

RDM : DS n°2

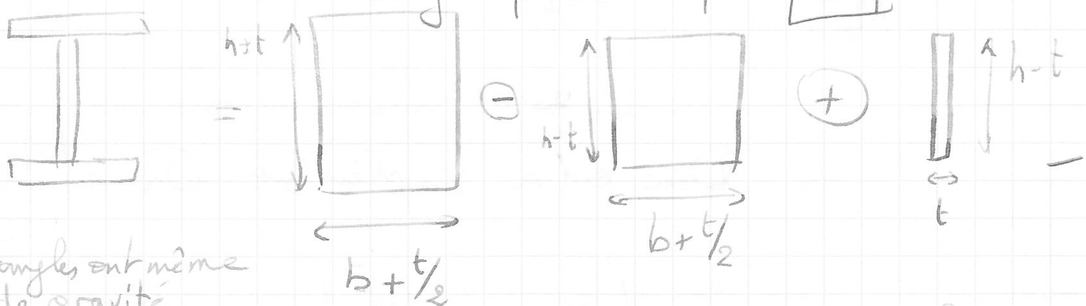
EXERCICE 1 : FLEXION

pour I_{Gz} :



car seules les distances en y importent. oui

il y a plus simple



Les rectangles ont même centre de gravité

soit $I_{Gz} = \frac{1}{12}\left[\left(b+\frac{t}{2}\right)(h+t)^3 - \left(b+\frac{t}{2}\right)(h-t)^3 + t(h-t)^3\right]$

$$\boxed{I_{Gz} = \frac{1}{12}\left[(h+t)^3\left(b+\frac{t}{2}\right) + (h-t)^3\left(\frac{t}{2}-b\right)\right]}$$

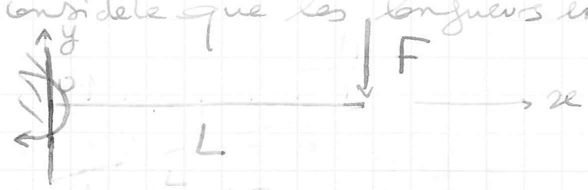
soit $I_{Gz} = \frac{1}{12}\left[(20+1)^3\left(7,5+\frac{1}{2}\right) + (20-1)^3\left(\frac{1}{2}-7,5\right)\right]$

$= \frac{21^3 \times 8 - 19^3 \times 7}{12}$

$$\boxed{I_{Gz} = 2173 \text{ cm}^4}$$ 2

le moment fléchissant est maximal en $x=0$. Pour chercher le moment en z, on ne considère que les longueurs en x

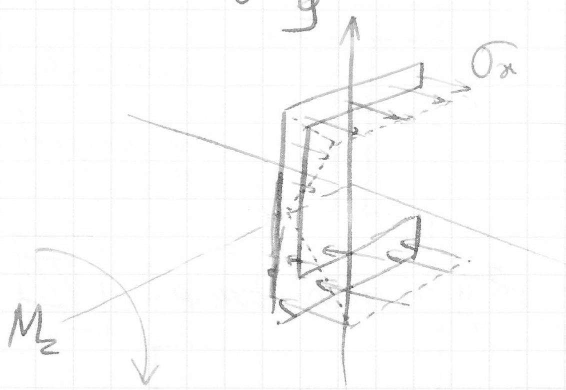
Soit



D'où $\vec{M_z}\,max = -F.L\,\vec{z}$: moment créé par F en $x=0$

$= -10\,000 \times 2 = -2.10^4$ N.m

la flexion est une flexion plane, car de chaque côté de l'axe les σ_x se compensent



Donc on a simplement $\sigma_x = \frac{M_z}{I_{Gz}} y$

avec $|\sigma_{x max}| = \frac{|M_z|}{I_{Gz}} |y_{max}|$ avec $|y_{max}| = \frac{h}{2} + \frac{t}{2}$

$= \frac{2.10^4}{2173.10^8} \times \left(200 + \frac{10}{2}\right).10^{-3}$

$\underline{|\sigma_{x max}| = 188,7\ MPa}$ 0,5

EXERCICE 2 : CISAILLEMENT.

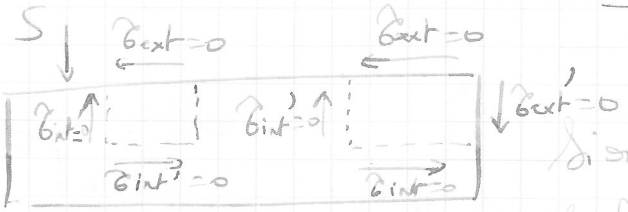
$$\left|\tau_{xy\ \text{moyen}}\right| = \frac{|T_y|}{S_a} = \frac{10\,000}{[10(200\ \ )].10^{-6}} = \underline{5\ \text{MPa}}$$ 1

l'âme est la seule à travailler correctement en cisaillement

$$S_a = t \times (h\ \ )$$

En effet, les rectangles des semelles ne travaillent pas en cisaillement

à mais en $\underline{Tx3}$



Si on isole une semelle : les surfaces extérieures ne peuvent être cisaillées

Donc, dans un coin, $\tau_{ext} = 0$ et $\tau_{ext}' = 0$

Ainsi $\tau_{int} = 0$ et $\tau_{int}' = 0$, (car $\tau_{ext} = \tau_{int}$ et $\tau_{ext}' = \tau_{int}'$)

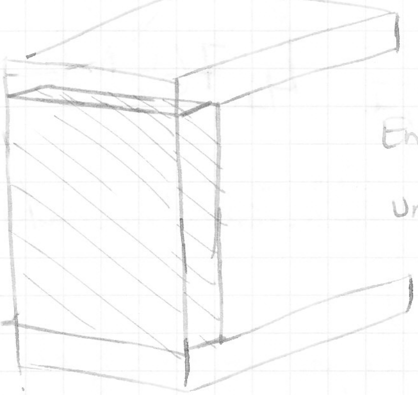
De plus, la contrainte de cisaillement due à la flexion, qui est τ_{int} ou τ_{int}', est nulle dans toutes les zones proches du bord : en effet, en toute zone proche de S, $\tau_{ext} = 0$ ce qui implique, grâce au théorème de réciprocité, que $\tau_{int}' = 0$ (et par égalité $\tau_{int} = \tau_{ext} = 0$)

2 Or la poutre est mince, donc on reste tout le temps dans la zone d'influence du bord (l'hypothèse de St Venant n'est pas applicable)

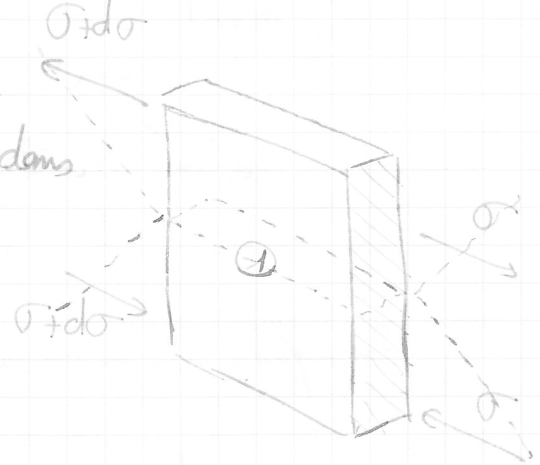
Donc les contraintes de cisaillement τ_{int} / τ_{int}' sont toujours quasi nulles dans les semelles

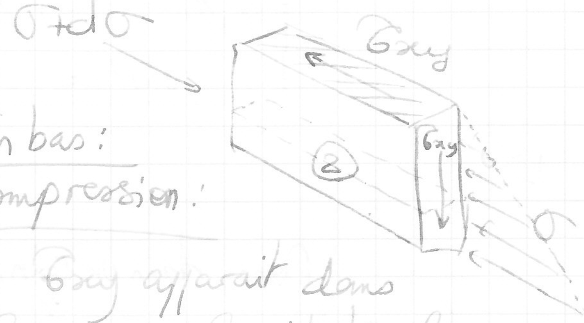
D'ailleurs, la condition de tangence au contour donne, si on considère toutes les contraintes parallèles, un cisaillement purement horizontal au-

On isole un tronçon de longueur dx de la poutre, dans l'âme



En flexion, on .. une différence dans les contraintes normales





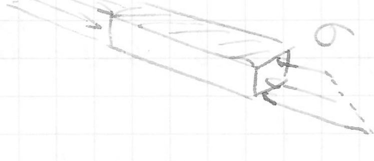
Coupons au milieu ①

<u>En bas :</u>
<u>Compression :</u>

Un τ_{xy} apparaît dans la coupe longitudinale pour compenser le $d\sigma$.

Il se retrouve, par réciprocité, en tant que contraintes de cisaillement dans la coupe droite.

Coupons plus bas : ②



Or : dans une section longitudinale prise plus bas, on a moins de contraintes σ à compenser sous forme de τ_{xy}, alors que la surface de la coupe longitudinale (sur laquelle s'exerce τ_{xy}) est aussi grande qu'au milieu. La contrainte τ_{xy} est donc + faible. (moins de "force" sur autant de surface)

ici important

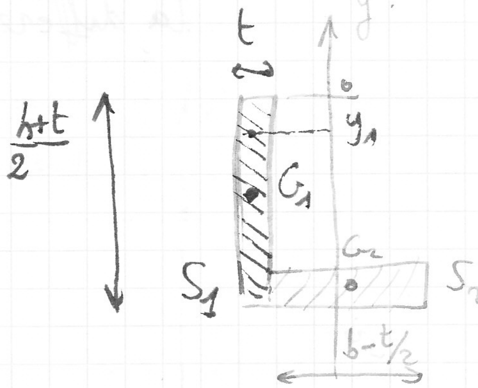
A section égale, la contrainte σ_{xy} est donc maximale là où les efforts normaux à compenser sont maximaux, c'est-à-dire au centre. En effet, lorsqu'on continue de monter pour effectuer la coupe longitudinale, les efforts σ_x de traction compensent petit à petit les efforts σ_x de compression qu'on avait en bas : σ_{xy} baisse de nouveau.

Ainsi σ_{xy} maxi est en $y=0$. Sachant que, par le théorème de réciprocité, σ_{xy} est la contrainte de cisaillement, on peut dire que le cisaillement est maximum en $y=0$.

Calcul :

dans la section AB, les contraintes sont tangentes à la surface, donc elles sont normales à AB sur toute la section (il serait en effet aussi impossible qu'au centre de la section elles ne soient pas normales à celle-ci car on a une quasi-symétrie par rapport au centre de AB, les semelles ayant une faible influence)

Donc $\int_{AB} \vec{\sigma_{xy}} \cdot \vec{dl} = t \times \sigma_{xy}$.



Et : $\iint_S y_1 \, dS = y_{G_1} \times S_1 + y_{G_2} \times S_2$

or $y_{G_1} = -\frac{h+t}{4}$ $\qquad S_1 = t\left(\frac{h+t}{2}\right)$

$y_{G_2} = -\frac{h}{2}$ $\qquad S_2 = t\left(b - \frac{t}{2}\right)$

G_1 et G_2 respectivement centres de gravité de S_1 et S_2

Donc $\iint_S y_1\, dS = -\frac{(h+t)}{4}\, t\, \frac{(h+t)}{2} - \frac{h}{2}\, t \left(b - \frac{t}{2}\right)$

$$= -\left[\frac{t}{8}(h+t)^2 + \frac{t}{2}\, h\left(b-\frac{t}{2}\right)\right]$$

$$= -\left[\frac{10}{8}(200+10)^2 + \frac{10}{2} \times 200\left(75 - \frac{10}{2}\right)\right]$$

$$= -125\,125 \ mm^3$$

Or $t\, \tau_{xy\,max} = -\frac{T_y}{I_{Gz}} \iint_S y_1\, dS$. avec $T_y = F$

$$\Longrightarrow \ |\tau_{xy\,max}| = -\frac{1}{10.10^{-3}} \times \frac{10\,000}{2173.10^{-8}} \times (-1)\, 125\,125.10^{-9}$$

$$= \frac{125\,125}{2\,173}\, 10^5$$

$$|\tau_{xy\,max}| = \underline{5{,}76 \ MPa}$$

2

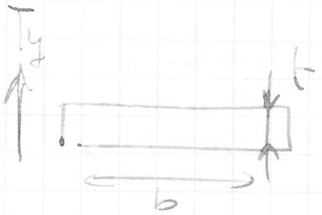
C'est un peu supérieur à $\tau_{x\,max}$, mais peu (trop peu pour être juste ?)

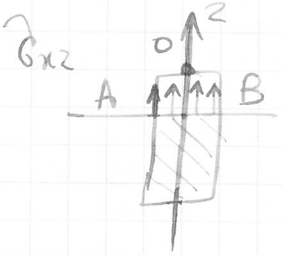
En effet, pour une section rectangulaire, on avait montré que

$\tau_{x\,max} = 3/2 \left(\frac{T_y}{S}\right)$, ce qui donnerait $\tau_{x\,max} = 7{,}5$ MPa.

Exercice 3 — Centre de cisaillement

La semelle est un rectangle





tangence → effort normal

Aire

$$\iint y_1 \, dS = y_G \times S = -\left(\frac{z+b}{2}\right) \times (b-z)\, t$$

$$= -\frac{t}{2}\left(b^2 - z^2\right)$$

Soit $\tau_{xz} = -\dfrac{1}{t}\,\dfrac{T_y}{I_{G_y}}\left(-\dfrac{t}{2}\right)\left(b^2-z^2\right)$

$$\tau_{xz} = -\frac{T_y}{I_{G_y}}\left(b^2-z^2\right)$$

~~avec~~ — avec $I_{G_y} = \dfrac{1}{12}\, t\, b^3 = \dfrac{1}{12} \times 10 \times 75^3$

$= 351\,562 \text{ mm}^4$

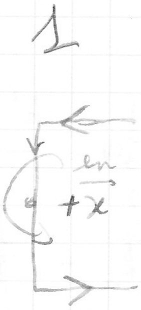
Pour que la section soit équilibrée, il faut que le sens soit opposé dans les 2 talons

non car on a enlevé les surfaces des semelles

Donc $|M_0| = \dfrac{h}{2} \displaystyle\int \tau_{xz}\, ds \times 2$ 1

bras levier

car les 2 s'ajoutent



$$= h\,\frac{T_y}{I_{G_z}} \int \left(b^2 - z^2\right) t\, dz$$

$$= \frac{12 h T_y t}{t b^3}\left(b \times b^2 - \frac{b^3}{3}\right) = \frac{12 h T_y t}{t b^3} \times \frac{2b^3}{3}$$

$$\boxed{|M_0| = 8 h T_y}$$

On appelle γ le centre de cisaillement.
Par symétrie, il est en $y=0$ ou   0,5

en γ le moment $C_{\gamma x} = 0$
selon $\vec{x}$ est nul :

$$C_{\gamma x} = C_{O x} - T_y \overrightarrow{\gamma G}$$ 0,5

$$0 = 8h\, T_y - T_y \overrightarrow{\gamma G} \quad (C_{\gamma x} \text{ est en } +\vec{x})$$

$$\gamma G = +8h$$

soit γ est en ~~$z = 1,6\,m$~~

Exercice 4   On a $a=0$ (couple à l'extrémité)
on est dans le cas "left & free to twist & warp right end fixed"

alors ~~$\theta = \frac{-T_0}{C_w E \beta^3}\left[\beta(l - \underset{x=0}{x}) - \tanh \beta l + \frac{\sinh \beta a}{\cosh \beta l}\right]$~~

$$\text{Max}\,\theta = \frac{T_0}{C_w E \beta^3}\left(\beta l - \tanh \beta l\right)$$

- $C_w = \frac{h^2 b^3 t}{12} \frac{2h+3b}{h+6b} = \frac{200^2\, 75^3\, 10}{12} \frac{2\times 200 + 3\times 75}{200 + 6\times 75} 10^{-18} = 1,35.10^{-8}\ m^6$
- $T_0 = 100\ Nm$
- $\beta = \sqrt{\frac{kG}{C_w E}}$ avec $k = \frac{t^3}{3}(h+2b) = \frac{10^3}{3}(200 + 2\times 75).10^{-12}$ 2

$= 1,167.10^{-7}\ m^4$

$\hookrightarrow \beta = \sqrt{\frac{1,167.10^{-7} \times 80\,000.10^{7}}{1,35.10^{-8} \times 210\,000}}$ N/m²

~~$= 5,738$~~

$\Rightarrow \text{Max}\,\theta = \frac{100}{1,35.10^{-8} \times 210\,000 \times (5,738)^3}\left(5738 \times 2 - \tanh(5738 \times 2)\right) = 2,4.10^{-3}\ rad$

Donc variation $\gamma_2 = 2,14 \cdot 10^{-3}$ rad

"Concentrated immediate torque"

Calcul de γ_1 : $\theta =$

↳ $T_0 = 0$

$T_A = 100$ N.m

et $\theta_A = 2,14 \cdot 10^{-3}$

Donc $\theta = 2,14 \cdot 10^{-3} + \frac{\theta'_A}{\beta} F_2 + \frac{\theta''_A}{\beta^2} F_3$

il faudrait calculer θ' et θ''

comme précédemment

ainsi que F_2 et F_3

On aurait alors $\gamma = \theta$

on ferait donc $\widehat{G}_x = G\gamma$

Formules plus simples données directement pour $a=0$

Petite faiblesse?